

Evolución histórica de las splines. Conjetura de de Boor

BARROS, Francisco ¹ ¹ Universidad Nacional de Tucumán. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Departamento de Matemática.Autor para correspondencia: BARROS, Francisco (fbarros@herrera.unt.edu.ar)

Resumen

Este manuscrito explora la evolución histórica del concepto de splines y su consolidación como herramienta fundamental en el diseño geométrico asistido por computadora. Se destacan los aportes de Schoenberg, Bézier, de Casteljau y, en particular, de Carl de Boor, cuyo algoritmo otorgó estabilidad numérica y eficiencia al uso de B-splines. Asimismo, se examina la conjetura de de Boor sobre el número de condición, aún no resuelta en su formulación general, lo que revela que incluso las herramientas matemáticas más consolidadas siguen planteando interrogantes abiertos a la investigación.

Palabras clave: Splines; B-splines; Conjetura de de Boor.

The Historical Evolution of Splines. De Boor's Conjecture.

Abstract

This manuscript explores the historical evolution of splines and their consolidation as a fundamental tool in computer-aided geometric design. It highlights the contributions of Schoenberg, Bézier, de Casteljau, and particularly Carl de Boor, whose algorithm ensured numerical stability and efficiency in working with B-splines. The manuscript also examines de Boor's conjecture regarding the condition number, which remains unresolved in its general formulation, demonstrating that even well-established mathematical tools continue to pose open questions for research.

Keywords: Splines; B-splines; de Boor's conjecture.

© 2025 Los autores. Este artículo es de acceso abierto y se distribuye bajo los términos de la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0). Esta licencia permite el uso, la distribución y la reproducción no comercial en cualquier medio. Siempre que se cite adecuadamente la obra original, cualquier obra derivada debe publicarse bajo la misma licencia.

Introducción

En estos tiempos de auge de la Inteligencia Artificial (IA), seguro recordaremos cómo *Skynet*, la IA consciente de la saga *Terminator* envía a un adversario para Arnold Schwarzenegger que adopta diversas transformaciones de formas brindando a los

espectadores un ejemplo sorprendente de la matemática en acción. El motor que impulsan los sofisticados gráficos por computadora, permitiendo la representación y manipulación de formas fluidas y complejas, se llaman B-splines. Sin embargo, su impacto va mucho más allá de los efectos especiales. Las B-splines han impulsado una transformación más lenta pero económicamente crucial, llevando el

diseño geométrico de la era de los modelos de arcilla y las mediciones manuales a la computación de alto rendimiento y las representaciones tridimensionales en computadoras de escritorio.

Siempre que las curvas y superficies de forma libre se representan matemáticamente, como en el diseño, el análisis y la fabricación asistidos por computadora, las B-splines son la clave para una implementación eficiente. Los primeros intentos de digitalizar curvas y superficies partieron de la interpolación polinómica, que rápidamente mostró limitaciones debido al fenómeno de Runge. Frente a ello, Paul de Casteljaeu en Citroën y Pierre Bézier en Renault desarrollaron algoritmos que, a partir de puntos de control, permitían representar curvas de forma libre de manera intuitiva y precisa (Farin, 2002). Sus métodos marcaron el inicio del diseño asistido por computadora.

La relevancia de las B-splines en industrias como la aeronáutica y la automotriz, donde la forma es un factor esencial, es tan grande que se las ha comparado con el motor de combustión en la historia del automóvil. Su papel resulta indispensable como fuerza impulsora que permite a estas industrias diseñar geometrías complejas con una precisión sin precedentes.

Evolución histórica de las splines

El concepto de *spline* tiene sus raíces a principios del siglo XX. Los ingenieros navales y aeronáuticos utilizaban una herramienta llamada *spline*, que era una regla flexible de madera o metal. Esta herramienta se fijaba en puntos específicos (nodos) en un tablero de dibujo para crear curvas suaves que representaban los contornos de los cascos de los barcos o las alas de los aviones. Los pesos de plomo o hierro llamados *ducks* mantenían la regla en su lugar (Fig.1). Esta técnica era una solución práctica para un problema complejo: la interpolación de una serie de puntos para obtener una curva que fuera lo más suave posible.

La formalización matemática de este concepto práctico se inició en la década de 1940. Isaac Schoenberg, un matemático de origen rumano-estadounidense, fue el primero en acuñar el término B-spline (abreviatura de *basis spline*) para referirse a una familia particular de splines que servían como funciones de base. Su

trabajo sentó los cimientos teóricos de la interpolación y aproximación con splines, (Schoenberg,1946). Demostró que cualquier spline podía ser representada como una combinación lineal de estas funciones de base, una propiedad que resultaría fundamental para su uso práctico.



Figura.1:- Pesas de metal, conocidas como patos (Ducks). <https://alatown.com/wp-content/uploads/2000/0103-spline-585x389.jpg>

La contribución de Schoenberg fue significativa, pero su trabajo se enfocó específicamente en aspectos teóricos. Construyó sus B-splines formando diferencias divididas (cocientes de diferencias de orden progresivamente superior) de funciones de potencia truncada. Desafortunadamente, el proceso de diferencias divididas que las define es un proceso numéricamente inestable. Nadie usaba B-splines antes de 1971 porque los cálculos que las involucraban solían ser tareas tediosas que los especialistas evitaban en lo posible.

La adopción generalizada de los splines en la industria del diseño geométrico no sería posible sin las contribuciones prácticas y algorítmicas de otros matemáticos e ingenieros. Aquí es donde Carl de Boor entraría en escena, inspirado en las ideas surgidas en los laboratorios de la industria automotriz de la mano de Paul de Faget de Casteljaeu (Citroën) y de Pierre Bézier (Renault), Fig. 2.

La contribución clave de Carl de Boor

En 1959, la compañía americana General Motors había adquirido una serie de fresadoras de control numérico, pero carecía de un lenguaje matemático adecuado para el ingreso de datos dentro de las máquinas que generaban las complejas partes de sus vehículos, en especial de aquellos que

contaban con aletas traseras. Esto obligaba a que las partes fueran divididas mediante un sistema tedioso e impreciso que ocasionaba continuas pérdidas de tiempo y errores frecuentes.



Figura. 2: Línea Citroën DS, primera en incorporar el diseño asistido por computadora (CAD)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Citroen_ds_1.jpg

Un año después, el matemático estadounidense Carl de Boor comenzó a trabajar para los laboratorios de la compañía General Motors donde ya se utilizaban splines en el diseño automotriz y junto con otros matemáticos notables, como Garrett Birkhoff y John Rice, de Boor emprendió un ambicioso programa para desarrollar una base matemática para las funciones splines que fuera compatible con la computación. La piedra angular de este desarrollo serían las B-splines. Tanto de Boor como L. Mansfield y M. Cox descubrieron, de manera independiente, un método recursivo para evaluar splines a través de las *B-splines* como afirma Farin (2002).

Carl de Boor, tomó las B-splines y las convirtió en una herramienta numérica práctica y eficiente. Su enfoque se centró en el desarrollo de un algoritmo para la evaluación y representación de B-splines (de Boor, 1972). Este algoritmo, conocido como el *Algoritmo de de Boor*, era numéricamente estable, que significa que es menos propenso a errores de redondeo que otros métodos, mucho más rápido que los enfoques existentes y en definitiva computacionalmente superior.

Una de las principales ventajas de las B-splines, destacada por de Boor, es la propiedad

de soporte local. Esto significa que, al cambiar algún punto de control sobre los que están definidas, solo se afecta la porción adyacente de la curva, no su totalidad. Esta propiedad es crucial para el diseño, ya que permite realizar modificaciones locales sin alterar el resto de la geometría. Esta característica no estaba presente en otros métodos como la interpolación polinomial de Lagrange, donde cada cambio en un punto de control afectaba toda la curva, lo que la hacía inestable y difícil de manejar.

“Por supuesto, Schoenberg creó las B-splines. Las cosas que yo consideraba valiosas en ellas no se comprendieron claramente al principio. Pero ahora se ven como algo obvio, y me complace haber contribuido a que eso ocurriera”, Carl de Boor.

Otro aspecto crucial del trabajo de de Boor fue su capacidad para integrar las B-splines con otras técnicas. En su obra *A Practical Guide to Splines* (de Boor, 1978), considerada como la biblia de las Splines, y que fue escrita con la intención de posicionar a las B-splines como un objeto de una denotada familiaridad. De Boor, además demostró técnicas robustas para convertir representaciones polinomiales a trozos a representación por B-splines. Esto fue un avance significativo porque permitió que incluso las técnicas de representación geométrica que no se habían formulado con splines pudieran tener a las B-splines como su base computacional. En la práctica, esto significó que los diseñadores podían seguir utilizando las herramientas que conocían, mientras que el motor del software se ejecutara en la base de B-splines de de Boor.

“Registraremos varias propiedades de la B-spline, con la esperanza de convertirla en un objeto tan familiar y real para el lector como, por ejemplo, la función seno”, Carl de Boor.

La Conjetura de de Boor

En 1976, Carl de Boor introdujo formalmente el concepto del número de condición de las bases de B-splines por medio de funcionales lineales (de Boor, 1975). Lo que buscaba entender era la sensibilidad de las B-splines frente a pequeñas variaciones en los coeficientes de sus combinaciones lineales. Dicha sensibilidad se cuantifica a través del número de condición κ_p donde el subíndice p indica la relación

directa con el grado polinomial de las B-splines. Cuanto más grande sea este número, peor será el comportamiento de la base en términos de estabilidad numérica. Su conjetura señalaba que este número crecía de manera exponencial de acuerdo al grado polinomial. Es decir que,

$$\kappa_p \sim 2^p \quad (1)$$

y que las configuraciones sin nodos interiores, representaban el peor caso en términos de estabilidad numérica.

Durante los años noventa esta visión comenzó a ponerse en duda. En 1990, el propio de Boor demostró que para el caso cúbico y cuártico ciertas configuraciones con un único nodo interior producían un número de condición incluso mayor que las configuraciones sin nodos interiores, cuestionando la validez de su conjetura inicial. Poco después, Scherer y Shadrin confirmaron que si bien el crecimiento exponencial de κ_p era correcto, debía matizarse con factores adicionales (Scherer y Shadrin, 1999), mostrando que los límites adecuados estaban dados por:

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) 2^{p-3/2} \leq \kappa_p \leq p(2^p - 1) \quad (2)$$

Estos resultados marcaron un punto de inflexión al demostrar que la ubicación de los nodos es determinante para la estabilidad y que el peor escenario no siempre coincide con el que se había conjeturado.

Más recientemente, Lyche, Morken y Reif calcularon con precisión los valores de κ_p para grados polinomiales pequeños, revelando la gran complejidad algebraica del problema. Para el caso cúbico el número de condición en norma infinito resulta ser la raíz de un polinomio de grado ocho, y para el caso cuártico, la raíz de un polinomio de grado diecinueve (Lyche. et al., 2023). De este modo se concluyó que, aunque para valores pequeños de p , los κ_p son accesibles, no existe una expresión que permita describir el comportamiento del número de condición de manera general.

Entonces, ¿por qué seguimos usando B-Splines? La respuesta es simple: porque las ventajas siguen superando a los problemas numéricos. De hecho, las B-splines son la base del estándar NURBS (Non-Uniform Rational B-

Splines), usado en diseño asistido por computadora y animación.

Conclusiones y perspectivas

El trabajo de de Boor tuvo un impacto transformador en la industria. La robustez y eficiencia de las B-splines, combinadas con las propiedades intuitivas para el diseñador, las convirtieron en el estándar de facto para la representación de formas complejas. En la industria automotriz, las B-splines hicieron posible el modelado digital de carrocerías con una precisión que antes era inalcanzable (de Boor, 2010). Esto no solo aceleró el ciclo de diseño, sino que también mejoró la calidad y la aerodinámica de los vehículos. En la industria aeroespacial, las B-splines se utilizaron para diseñar las superficies de las alas y los fuselajes, permitiendo simulaciones más precisas y una fabricación más eficiente.

El Algoritmo de Oslo, desarrollado en 1979 por Elaine Cohen, Tom Lyche y Richard Riesenfeld, en Cohen et al. (1980), marcó un punto de inflexión en el tratamiento computacional de las B-splines con nodos no uniformes. Extendió el trabajo iniciado por de Boor al proporcionar una técnica estable y general para insertar nodos de manera arbitraria en B-splines no uniformes. Mientras que el algoritmo de de Boor aseguraba la evaluación recursiva eficiente y numéricamente estable de las B-splines, el de Oslo permitió su refinamiento localizado sin necesidad de subdividir toda la curva. Esta complementariedad consolidó a las B-splines como herramienta flexible y robusta en diseño geométrico y aproximación numérica.

El recorrido histórico de las splines muestra un entramado de aportes sucesivos que fueron ampliando sus posibilidades: desde los parches de Coons, que se convirtieron en un método clave para construir superficies computacionalmente mediante piezas o parches, hasta la formulación de las Non Uniform Rational B-Splines (NURBS) por Ken Versprille en su tesis doctoral de 1975. Desarrollos paralelos se llevaron adelante en la Universidad de Utah, en Boeing y la industria del software de simulación. Estas generalizaciones se implementaron al diseño asistido por computadora y otorgaron una flexibilidad sin precedentes, consolidando a las B-splines como núcleo de la geometría computacional moderna. Sin embargo, pese a

este notable desarrollo y a la potencia de sus aplicaciones, la conjetura de de Boor sobre la estabilidad numérica permanece abierta, recordándonos que incluso las herramientas

más consolidadas siguen ofreciendo interrogantes que guían la investigación matemática actual.

REFERENCIAS

Cohen, E., Lyche, T. y Riesenfeld, R. (1980) 'Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics', *Computer graphics and image processing*, 14(2), 87-111.

De Boor, C. (1972) 'On calculating with B-splines', *Journal of Approximation theory*, 6(1), 50-62.

De Boor, C. (1975) 'On local linear functionals which vanish at all B-splines but one', *Mathematics Research Center, University of Wisconsin*.

De Boor, C. (1978) *A practical guide to splines*. New York: springer.

De Boor, C. (2010) On wings of splines. In *Creative Minds, Charmed Lives: Interviews at Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore* (pp. 50-57).

DeVore, R. y Ron, A. (2005) Developing a computation-friendly mathematical foundation for spline functions. *SIAM News*, 38(4), 71.

Farin, G.E. (2002). *A History of Curves and Surfaces in CAGD*. *Handbook of computer aided geometric design*, 1, 1-22.

Lyche, T., Mørken y K., Reif, U. (2023) 'On the condition of cubic B-splines', *Journal of Approximation Theory*, 289, 105883.

Scherer, K. y Shadrin, A.Y. (1999) 'New Upper Bound for the B-Spline Basis Condition Number: II. A Proof of de Boor's 2k-Conjecture', *Journal of Approximation theory*, 99(2), 217-229.

Schoenberg, I.J. (1946) Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae. *Quarterly of applied mathematics*, 4(1), 45-99.

AUTOR

BARROS, Francisco

Licenciado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán (FACET-UNT). Estudiante de la Maestría en Matemática. Su tema de investigación es "Bases de B-splines". Profesor Adjunto del Departamento de Matemática.

fbarros@herrera.unt.edu.ar

ORCID  0009-0000-3570-6095.

NOTA DEL EDITOR

cet - Revista de Ciencias Exactas e Ingeniería se mantiene neutral con respecto a las reivindicaciones jurisdiccionales en mapas publicados y afiliaciones institucionales.